

## § 12. Арифметические операции в позиционных системах счисления

### Сложение чисел в системе счисления с основанием $q$

Арифметические операции в позиционных системах счисления с основанием  $q$  выполняются по правилам, аналогичным правилам, действующим в десятичной системе счисления.

В начальной школе для обучения детей счёту используют таблицы сложения и умножения. Подобные таблицы можно составить для любой позиционной системы счисления.

Рассмотрите примеры таблиц сложения в троичной (табл. 3.2), восьмеричной (табл. 3.4) и шестнадцатеричной (табл. 3.3) системах счисления.

Таблица 3.2

Сложение в троичной системе счисления

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Таблица 3.3

## Сложение в шестнадцатеричной системе счисления

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Таблица 3.4

## Сложение в восьмеричной системе счисления

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Чтобы в системе счисления с основанием  $q$  получить сумму  $S$  двух чисел  $A$  и  $B$ , надо просуммировать образующие их цифры по разрядам  $i$  справа налево:

- если  $a_i + b_i < q$ , то  $s_i = a_i + b_i$ , старший  $(i + 1)$ -й разряд не изменяется;
- если  $a_i + b_i \geq q$ , то  $s_i = a_i + b_i - q$ , старший  $(i + 1)$ -й разряд увеличивается на 1.



### Примеры:

$$\begin{array}{r} + 100202_3 \\ + 10102_3 \\ \hline 111011_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 12345_8 \\ + 2443_8 \\ \hline 15010_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + FE12A9_{16} \\ + 23528_{16} \\ \hline 10047D1_{16} \end{array}$$

## Вычитание чисел в системе счисления с основанием $q$

Чтобы в системе счисления с основанием  $q$  получить разность  $R$  двух чисел  $A$  и  $B$ , надо вычислить разности образующих их цифр по разрядам  $i$  справа налево:

- если  $a_i \geq b_i$ , то  $r_i = a_i - b_i$ , старший  $(i + 1)$ -й разряд не изменяется;
- если  $a_i < b_i$ , то  $r_i = a_i - b_i + q$ , старший  $(i + 1)$ -й разряд уменьшается на 1 (выполняется заём в старшем разряде).



### Примеры

$$\begin{array}{r} - 100110_3 \\ - 10101_3 \\ \hline 20002_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 17345_8 \\ - 2443_8 \\ \hline 14702_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - FE12A9_{16} \\ - 23528_{16} \\ \hline FBDD81_{16} \end{array}$$

## Умножение чисел в системе счисления с основанием $q$

Рассмотрите примеры таблиц умножения в троичной (табл. 3.5), восьмеричной (табл. 3.6) и шестнадцатеричной (табл. 3.7) системах счисления.

Таблица 3.5

### Умножение в троичной системе счисления

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Таблица 3.6

### Умножение в восьмеричной системе счисления

$\times$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61



Таблица 3.7

## Умножение в шестнадцатеричной системе счисления

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Рассмотрим алгоритм умножения многозначного числа на однозначное. Чтобы в системе счисления с основанием  $q$  получить произведение  $M$  многозначного числа  $A$  и однозначного числа  $b$ , надо вычислить произведения  $b$  и цифр, образующих число  $A$  по разрядам  $i$  справа налево:

- если  $a_i \cdot b < q$ , то  $m_i = a_i \cdot b$ , старший  $(i + 1)$ -й разряд не изменяется;
- если  $a_i \cdot b \geq q$ , то  $m_i = a_i \cdot b \bmod q$ , старший  $(i + 1)$ -й разряд увеличивается на  $a_i \cdot b \operatorname{div} q$  (где  $\operatorname{div}$  — операция целочисленного деления).



## Примеры:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ \times 202_3 \\ \hline 2_3 \\ 1111_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \times 246_8 \\ \hline 5_8 \\ 1476_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \quad 7 \quad 5 \quad 1 \\ \times AD93_{16} \\ \hline 9_{16} \\ 61A2B_{16} \end{array}$$

Умножение многозначного числа на многозначное число выполняется столбиком. При этом два множителя располагаются один под другим так, чтобы разряды чисел совпадали (находились в одном столбце).

Если один из множителей или оба множителя оканчиваются нулями, то числа записываются так, чтобы в одном столбце оказались их самые младшие разряды с цифрами, отличными от нуля. Нули переносятся в итоговое произведение, а в поле записи поэтапных произведений не заносятся.

Поэтапные (разрядные) произведения складываются по разрядам и под чертой записывается результат.



## Примеры:

$$\begin{array}{r} \times 2020_3 \\ \times 210_3 \\ \hline 202_3 \\ + 1111_3 \\ \hline 1201200_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 2460_8 \\ \times 15_8 \\ \hline 1476_8 \\ + 246_8 \\ \hline 41560_8 \end{array}$$

## Деление чисел в системе счисления с основанием q

Деление нельзя свести к поразрядным операциям над цифрами, составляющими число.

Деление чисел в системе счисления с произвольным основанием q выполняется так же, как и в десятичной системе счисления.



### Пример

$$\begin{array}{r|l}
 2640_8 & 17_8 \\
 - 17_8 & 140_8 \\
 \hline
 74_8 & \\
 - 74_8 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

## Двоичная арифметика

Арифметика двоичной системы счисления основывается на использовании следующих таблиц сложения, вычитания и умножения:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

-	0	1
0	0	$\bar{1}1$
1	1	0

×	0	1
0	0	1
1	1	1

Рассмотрим несколько простых, но очень важных примеров на сложение и вычитание в двоичной системе счисления.

$$\begin{array}{r}
 111111 \\
 + 111111_2 \\
 + 1 \\
 \hline
 1000000_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 01111 \\
 - 10000_2 \\
 + 1 \\
 \hline
 1111
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0111 \\
 - 101010_2 \\
 + 111_2 \\
 \hline
 100011_2
 \end{array}$$



## Пример 1.

Найдём количество единиц в двоичной записи числа, являющегося результатом десятичного выражения

$$2^{4000} + 4^{2016} + 2^{2018} - 8^{600} + 6.$$

Представим все операнды исходного выражения в виде степеней двойки:

$$4^{2016} = (2 \cdot 2)^{2016} = (2^2)^{2016} = 2^{2 \cdot 2016} = 2^{4032},$$

$$8^{600} = (2^3)^{600} = 2^{1800},$$

$$6 = 4 + 2 = 2^2 + 2^1.$$

Исходное выражение примет вид:

$$2^{4000} + 4^{2016} + 2^{2018} - 8^{600} + 6 = 2^{4000} + 2^{4032} + 2^{2018} - 2^{1800} + 2^2 + 2^1.$$

Перепишем выражение в порядке убывания степеней:

$$2^{4032} + 2^{4000} + 2^{2018} - 2^{1800} + 2^2 + 2^1.$$

Для работы с десятичными числами вида  $2^n$  полезно иметь в виду следующие закономерности в их двоичной записи:

$$2^1 = 10 = 1 + 1;$$

$$2^2 = 100 = 11 + 1;$$

$$2^3 = 1000 = 111 + 1;$$

$$2^4 = 10000 = 1111 + 1 \text{ и т. д.}$$

В общем виде:

$$2^n = \underbrace{10\dots0}_n = \underbrace{1\dots1}_n + 1.$$

Для натуральных  $n$  и  $m$  таких, что  $n > m$ , получаем:



$$2^n + 2^m = \underbrace{10\dots0}_n + \underbrace{10\dots0}_m = \underbrace{10\dots0}_{n-m-1} \underbrace{10\dots0}_m,$$

$$2^n - 2^m = \underbrace{1\dots1}_n + 1 - (\underbrace{1\dots1}_m + 1) = \underbrace{1\dots1}_n - \underbrace{1\dots1}_m = \underbrace{1\dots1}_{n-m} \underbrace{0\dots0}_m.$$

Эти соотношения позволят нам подсчитать количество единиц в нашем выражении, не прибегая к его вычислению.

Действительно, двоичные представления чисел  $2^{4032}$  и  $2^{4000}$  внесут в двоичное представление суммы по одной единице. Разность  $2^{2018} - 2^{1800}$  в двоичной записи представляет собой цепочку из 218 единиц и следующих за ними 1800 нулей. Слагаемые  $2^2$  и  $2^1$  дают ещё 2 единицы.

Итого:  $1 + 1 + 218 + 1 + 1 = 222$ .



**Пример 2.** Найдём количество цифр в восьмеричной записи числа, являющегося результатом десятичного выражения

$$2^{299} + 2^{298} + 2^{297} + 2^{296}.$$

Двоичное представление исходного числа имеет вид:  $\underbrace{11110\dots0}_{296}$ . Всего в этой записи 300 двоичных символов. При переводе двоичного числа в восьмеричную систему счисления каждая триада исходного числа заменяется восьмеричной цифрой. Следовательно, восьмеричное представление исходного числа состоит из 100 цифр.

### Самое главное

Арифметические операции в позиционных системах счисления с основанием  $q$  выполняются по правилам, аналогичным правилам, действующим в десятичной системе счисления.

Если необходимо вычислить значение арифметического выражения, операнды которого представлены в различных системах счисления, можно:

- 1) все операнды представить в привычной нам десятичной системе счисления;
- 2) вычислить результат выражения в десятичной системе счисления;
- 3) перевести результат в требуемую систему счисления.

Для работы с десятичными числами вида  $2^n$  полезно иметь в виду следующие закономерности в их двоичной записи:

$$2^n = \underbrace{10\dots0}_n = \underbrace{1\dots1}_n + 1.$$

Для натуральных  $n$  и  $m$  таких, что  $n > m$ , получаем:

$$2^n + 2^m = \underbrace{10\dots0}_n + \underbrace{10\dots0}_m = \underbrace{10\dots0}_{n-m-1} \underbrace{10\dots0}_m,$$

$$2^n - 2^m = \underbrace{1\dots1}_n + 1 - (\underbrace{1\dots1}_m + 1) = \underbrace{1\dots1}_n - \underbrace{1\dots1}_m = \underbrace{1\dots1}_{n-m} \underbrace{0\dots0}_m.$$

## Вопросы и задания

1. Выполните арифметические операции над двоичными числами:

- 1)  $10010011 + 101101$ ;
- 2)  $110010,11 + 110110,11$ ;
- 3)  $110101110 - 10111111$ ;
- 4)  $111110 \cdot 100010$ ;
- 5)  $11111100101 : 101011$ .

Для того чтобы убедиться в правильности полученных результатов, найдите десятичные эквиваленты операндов и результата.

2. Какое число следует за каждым из данных:

1)  $223_4$ ; 2)  $677_8$ ; 3)  $2222_3$ ; 4)  $1001_2$ ?

Ответ для каждого числа дайте в указанной и десятичной системах счисления. 3. Какое число предшествует каждому из данных:

1)  $222_3$ ; 2)  $1000_5$ ; 3)  $233_4$ ; 4)  $1001_2$ ?

Ответ для каждого числа дайте в указанной и десятичной системах счисления.

4. Сумму восьмеричных чисел  $17 + 1700 + 170000 + 17000000 + 1700000000$  перевели в шестнадцатеричную систему счисления. Найдите в шестнадцатеричной записи числа, равного этой сумме, пятую цифру слева.

5. Вычислите значение выражения:

1)  $(1111101_2 + AF_{16}) : 36_8$ ;  
2)  $125_8 + 11101_2 \cdot A2_{16} - 1417_8$ .

6. Найдите среднее арифметическое следующих чисел:

1)  $10010110_2$ ,  $1100100_2$  и  $110010_2$ ;  
2)  $226_8$ ,  $64_{16}$  и  $62_8$ .

7. В примерах на сложение восстановите неизвестные цифры, обозначенные знаком вопроса, определив вначале, в какой системе счисления эти числа записаны.

1) 
$$\begin{array}{r} 2?21 \\ + 123? \\ \hline ?203 \end{array}$$

2) 
$$\begin{array}{r} 5?55 \\ + ?327 \\ \hline ?16?4 \end{array}$$


3) 
$$\begin{array}{r} 21?02 \\ + ?1212 \\ \hline ?2?021 \end{array}$$


8. Даны 4 целых числа, записанные в двоичной системе счисления:


11000000, 11000011, 11011001, 11011111.

Сколько среди них чисел, больших, чем  $AV_{16} + 25_8$ ?

 9. Сколько единиц в двоичной записи числа  $4^{2014} + 2^{2015} - 9$ ?

 \*10. Сколько единиц в двоичной записи числа  $8^{4024} - 4^{1605} + 2^{1024} - 126$ ?

 11. Сколько цифр в восьмеричной записи числа  $2^{1024} + 2^{1026}$ ?

 12. Какая первая цифра в шестнадцатеричной записи числа  $2^{1024} + 2^{1025}$ ?