Построение таблиц истинности

Таблицу значений, которые принимает логическое выражение при всех сочетаниях значений (наборах) входящих в него переменных, называют таблицей истинности логического выражения.

Для того чтобы построить таблицу истинности логического выражения, достаточно:

1) определить число строк таблицы $m = 2^n$, где n — число переменных в логическом выражении;

2) определить число столбцов таблицы как сумму чисел логических переменных и логических операций в логическом выражении;

3) установить последовательность выполнения логических операций с учётом скобок и приоритетов операций;

4) заполнить строку с заголовками столбцов таблицы истинности, занеся в неё имена логических переменных и номера выполняемых логических операций;

5) выписать наборы входных переменных с учётом того, что они представляют собой ряд целых n-разрядных двоичных чисел от 0 до $2^n - 1$;

6) провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции.

Пример 1. Построим таблицу истинности для логического выражения

$A \mathbin{\&} B \vee \bar{A} \mathbin{\&} \bar{B}$.

В этом выражении две логические переменные и пять логических операций. Всего в таблице истинности будет пять строк (2^2 плюс строка заголовков) и 7 столбцов.

Начнём заполнять таблицу истинности с учётом следующего порядка выполнения логических операций: сначала выполняются операции отрицания (в порядке следования), затем операции конъюнкции (в порядке следования), последней выполняется дизъюнкция.

$$A \overset{3}{\mathbin{\&}} B \overset{5}{\vee} \overset{1}{\bar{A}} \overset{4}{\mathbin{\&}} \overset{2}{\bar{B}}$$

A	B	1	2	3	4	5
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1

Обратите внимание на последний столбец, содержащий конечный результат. Какой из рассмотренных логических операций он соответствует?

Логические выражения, зависящие от одних и тех же логических переменных, называются равносильными или эквивалентными, если для всех наборов входящих в них переменных значения выражений в таблицах истинности совпадают.

Таблица истинности, построенная в предыдущем примере, доказывает равносильность выражений $A \mathbin{\&} B \vee \bar{A} \mathbin{\&} \bar{B}$ и $A \leftrightarrow B$.

Можно записать: $A \& B \vee \overline{A} \& \overline{B} = A \leftrightarrow B$.

С помощью таблиц истинности докажите равносильность выражений $A \leftrightarrow B$ и $\overline{A} \vee B$.

Функцию от n переменных, аргументы которой и сама функция принимают только два значения — 0 и 1, называют **логической функцией**. Таблица истинности может рассматриваться как способ задания логической функции.

Анализ таблиц истинности

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. Известен фрагмент таблицы истинности для логического выражения F, содержащего логические переменные A, B и C.

A	*B*	*C*	*F*
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Сколько из приведённых ниже логических выражений соответствуют этому фрагменту?

1) $(A \vee C) \& B$;
2) $(A \vee B) \& (C \rightarrow A)$;
3) $(A \& B \vee C) \& (B \rightarrow A \& C)$;
4) $(A \rightarrow B) \vee (C \vee A \rightarrow B)$.

Ответить на поставленный вопрос можно, вычислив значение каждого логического выражения на каждом заданном наборе переменных и сравнив его с имеющимся значением F.

1) Логическое выражение $(A \vee C) \& B$ соответствует данному фрагменту таблицы истинности:

A	B	C	$(A \vee C) \& B$	F
1	0	1	$(1 \vee 1) \& 0 = 1 \& 0 = 0$	0
1	1	0	$(1 \vee 0) \& 1 = 1 \& 1 = 1$	1
1	1	1	$(1 \vee 1) \& 1 = 1 \& 1 = 1$	1

2) Логическое выражение $(A \vee B) \& (C \rightarrow A)$ не соответствует данному фрагменту таблицы истинности, т. к. уже на первом наборе значение рассматриваемого логического выражения не совпадает со значением F. Проведение дальнейших вычислений не имеет смысла.

A	B	C	$(A \vee B) \& (C \rightarrow A)$	F
1	0	1	$(1 \vee 0) \& (1 \rightarrow 1) = 1 \& 1 = 1$	0
1	1	0		1
1	1	1		1

3) Логическое выражение $(A \& B \vee C) \& (B \rightarrow A \& C)$ не соответствует данному фрагменту таблицы истинности:

A	B	C	$(A \& B \vee C) \& (B \rightarrow A \& C)$	F
1	0	1	$(1 \& 0 \vee 1) \& (0 \rightarrow 1 \& 1) = 1 \& 1 = 1$	0
1	1	0		1
1	1	1		1

4) Логическое выражение $(A \to B) \vee (C \vee A \to B)$

A	B	C	$(A \to B) \vee (C \vee A \to B)$	F
1	0	1	$(1 \to 0) \vee (1 \vee 1 \to 0) = 0$	0
1	1	0	$(1 \to 1) \vee (0 \vee 1 \to 1) = 1$	1
1	1	1	$(1 \to 1) \vee (1 \vee 1 \to 1) = 1$	1

Итак, имеется два логических выражения, соответствующих заданному фрагменту таблицы истинности.

Можно ли утверждать, что в результате решения задачи мы нашли логическое выражение F?

Пример 3. Логическая функция F задаётся выражением:

$$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \,\&\, (\bar{x} \vee y).$$

Ниже приведён фрагмент таблицы истинности, содержащий все наборы переменных, на которых F истинна.

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Определим, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных x, y, z.

В исходном логическом выражении задействовано три логические переменные. Полная таблица истинности для этого выражения должна состоять из 8 (2^3) строк.

Наборам переменных, на которых логическое выражение истинно, соответствуют десятичные числа 0, 2, 3, 4 и 7.

Следовательно, наборам переменных, на которых логическое выражение ложно, должны соответствовать десятичные числа 1, 5 и 6 (их двоичные коды 001, 101 и 110). Построим по этим данным вторую часть таблицы истинности:

?	?	?	F
0	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

Теперь выясним, при каких значениях x, y, z логическое выражение ложно: $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y) = 0$. Логическое произведение ложно, если хотя бы один из операндов равен нулю. Таким образом, мы имеем две дизъюнкции, каждая из которых должна быть ложной. Это возможно только в случае равенства нулю каждого из операндов, входящих в дизъюнкцию. Подберём подходящие значения x, y и z, заполняя следующую таблицу:

	x	y	z	F
$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$				0
$\bar{x} \vee y$				0

Первая дизъюнкция равна нулю на наборе 011. Для равенства нулю второй дизъюнкции требуется, чтобы x = 1, y = 0, а z может быть и 0, и 1.

	x	y	z	F
$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	0	1	1	0
$\bar{x} \vee y$	1	0	0	0
	1	0	1	0

Сравним эту таблицу с восстановленным нами фрагментом исходной таблицы истинности, предварительно подсчитав, сколько раз каждая переменная принимает единичное значение.

Восстановленный фрагмент

?	?	?	F
0	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0
2	1	2	

Таблица со значениями *x*, *y* и *z*

	x	y	z	F
$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	0	1	1	0
$\bar{x} \vee y$	1	0	0	0
	1	0	1	0
	2	1	2	

Переменная y принимает единичное значение только один раз. Следовательно, ей соответствует второй столбец исходной таблицы. Из таблицы со значениями x, y и z следует, что при y = 1: x = 0, а z = 1. Следовательно, переменной z соответствует первый столбец, а переменной x — третий столбец исходной таблицы.

Убедиться в правильности полученного ответа можно, полностью заполнив следующую таблицу:

z	y	x	$A = x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	$B = \bar{x} \vee y$	$A \& B$	F
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Самое главное

Таблицу значений, которые принимает логическое выражение при всех сочетаниях значений (наборах) входящих в него переменных, называют таблицей истинности логического выражения.

Истинность логического выражения можно доказать путём построения его таблицы истинности.

Функцию от n переменных, аргументы которой и сама функция принимают только два значения — 0 и 1, называют логической функцией. Таблица истинности может рассматриваться как способ задания логической функции.

Вопросы и задания

1. Что представляет собой таблица истинности?

2. Составлена таблица истинности для логического выражения, содержащего n переменных. Известно m — количество строк, в которых выражение принимает значение 0. Требуется выяснить, в скольких случаях логическое выражение примет значение 1 при следующих значениях n и m:

1) $n = 6, m = 15$;
2) $n = 7, m = 100$;
3) $n = 10, m = 500$.

3. Постройте таблицы истинности для следующих логических выражений:

1) $(A \to B) \leftrightarrow (A \& B)$;
2) $(A \to B) \to ((A \to \overline{B}) \to \overline{A})$;
3) $(A \to (C \to B)) \to (B \lor C)$.

4. Рассмотрите два составных высказывания:

- F1 = «Если одно слагаемое делится на 3 и сумма делится на 3, то и другое слагаемое делится на 3»;
- Fz = «Если одно слагаемое делится на 3, а другое слагаемое не делится на 3, то сумма не делится на 3».

Формализуйте эти высказывания, постройте таблицы истинности для каждого из полученных выражений и убедитесь, что результирующие столбцы совпадают.

5. Логическое выражение, являющееся истинным при любом наборе входящих в него переменных, называется тождественно истинным. Убедитесь, что следующие логические выражения являются тождественно истинными:

1) $A \to (B \to A)$;
2) $(A \to \overline{B}) \to (B \to \overline{A})$;
3) $(A \& C \to B) \to (C \to (A \lor B \to B \& C))$.

6. Какое из приведённых логических выражений равносильно выражению $(A \to C) \& (B \to C)$?

1) $A \& B \to C$;
2) $A \to B \to C$;
3) $A \lor B \to C$;
4) $A \leftrightarrow B \to C$.

7. Известен фрагмент таблицы истинности для логического выражения F, содержащего логические переменные А, Б и С.

A	*B*	*C*	*F*
0	1	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Какое из приведённых далее логических выражений соответствуют этому фрагменту?

1) $A \& C \vee (B \to A)$;
2) $(A \vee B) \& (C \to A)$;
3) $(A \& B \vee C) \& (B \to A \& C)$;
4) $(\overline{B \to A}) \vee (C \vee A \to B)$;
5) **ни одна из указанных формул.**

8. Логическая функция F задаётся выражением

$$(A \& B \& \overline{C}) \vee (A \& B \& C) \vee (A \& \overline{B} \& \overline{C}).$$

Ниже приведён фрагмент таблицы истинности, содержащий все наборы переменных, на которых F ложна.

?	?	?	*F*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0

Какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных A, B, C?